ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - SESSION 1980

MATHEMATIQUES : *durée* : 2 h

1re épreuve

Cette épreuve est destinée aux Elèves des classes de Mathématiques Spéciales M, M', P, P', T, TA et TB.

Lors de la correction de l'épreuve, il sera tenu compte de la présentation, de la clarté de la rédaction, de la rigueur des raisonnements, et du choix de la solution proposée.

On considère la fonction polynôme sur $\mathbb{C}$

$$P(x) = x^4 - 2(\cos a + \cos b)\, x^3 + 2\,(1 + 2\cos a \cos b)\, x^2 - 2(\cos a + \cos b)\, x + 1$$

avec a et b $\in \mathbb{R}$, $\cos a \neq \cos b$

1° On pose $y = x + \frac{1}{x}$. Montrer que $P(x) = x^2 . Q(y)$ où $Q(y)$ est un polynôme en y que l'on déterminera.

2° Déterminer les racines de Q(y) et en déduire celles de P(x)

3° Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle $\frac{1}{P(x)}$

II

Soit P l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K. Soit A $\in$ P, un polynôme de degré n (n $\geqslant$ 1) .

On désigne par Q_A et R_A les applications de P dans P qui, à un polynôme B de P associent, respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de B par A.

1° Quelle est la relation liant A, B, $Q_A(B)$ et $R_A(B)$?

Que peut-on dire du degré de $R_A(B)$?

Montrer que $Q_A(3)$ et $R_A(B)$ sont des endomorphismes linéaires de P. Définir pour chacune de ces applications l'image et le noyau.

2° Soit A' $\in$ P un polynôme de degré n' (n' $\geqslant$ 1). Ecrire l'égalité de la division euclidienne de $Q_A(B)$ par A' et en déduire que

$$Q_{A'A} = Q_A \circ Q_{A'} = Q_{A'} \circ Q_A$$

On pose $Q_A^0 = I$ l'application identique, $Q_A^1 = Q_A$ et $Q_A^k = Q_A \circ Q_A^{k-1}$

Comparer Q_{A^k} et Q_A^k .

3° On pose $B_0 = R_A(B)$ et $B_k = R_A\left[Q_A^k(B)\right]$

Montrer que l'on peut écrire B sous la forme

$$B = Q_A^k(B)\, A^k + \sum_{q=0}^{k-1} B_q A^q \qquad k \geqslant 1$$

si B est de degré p, quel est le degré de $Q_A^k(B)$?

Montrer que B se décompose, de façon unique, en la somme d'un nombre fini de termes de la forme $B_q A^q$

$$④ \qquad B = \sum_{q \geqslant 0} B_q A^q$$

où B_q désigne un polynôme de degré strictement inférieur à n.

4° Application. On pose $A = x^2 + x + 1$

$$B = 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1.$$

a) Décomposer B sous la forme ④

b) Décomposer en éléments simples, sur le corps des réels, la fraction $\frac{2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^3}$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail